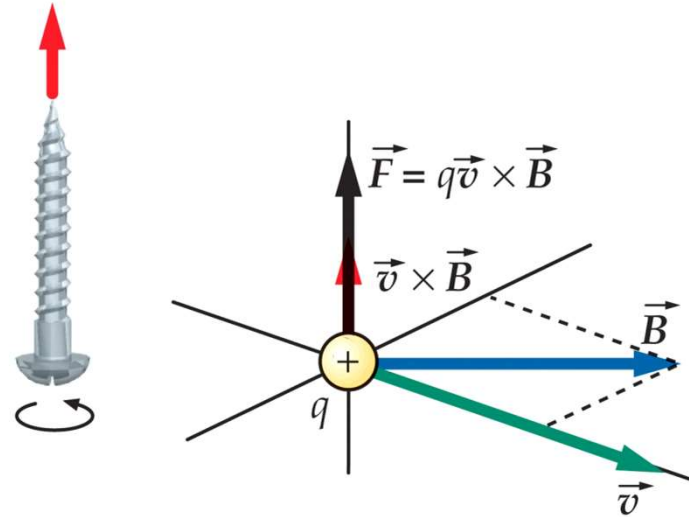


# **POLE MAGNETYCZNE**

## ***ŹRÓDŁA POLA MAGNETYCZNEGO***

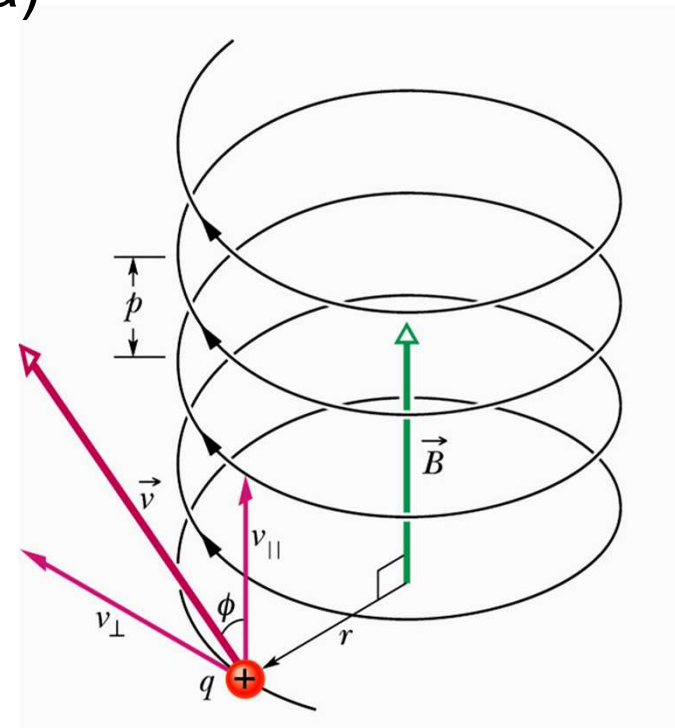
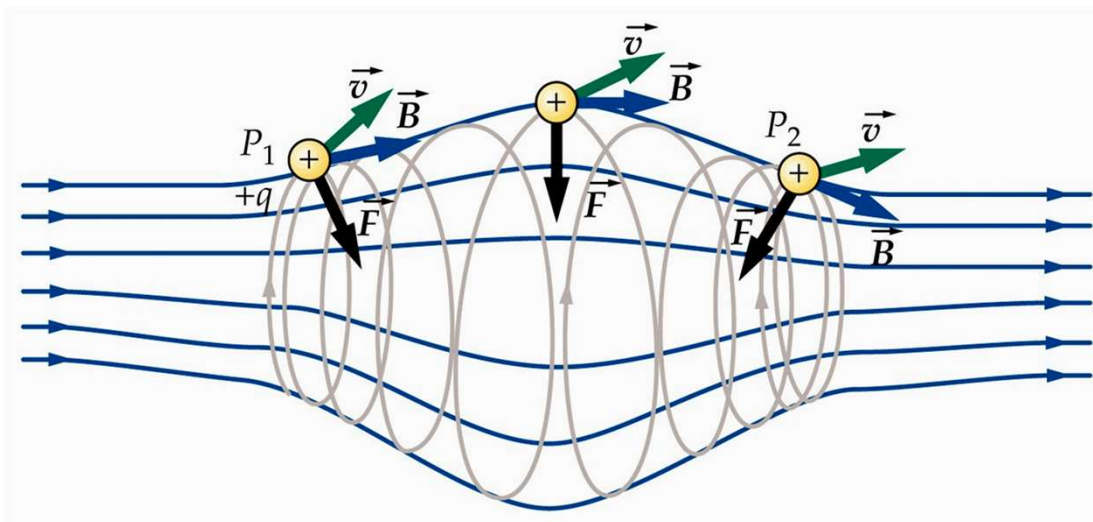
Definicja wektora indukcji pola magnetycznego

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$



Jednostką indukcji pola B jest 1T (tesla)  
1T=1N/Am

Pole magnetyczne zakrzywia tor ruchu ładunku elektrycznego.

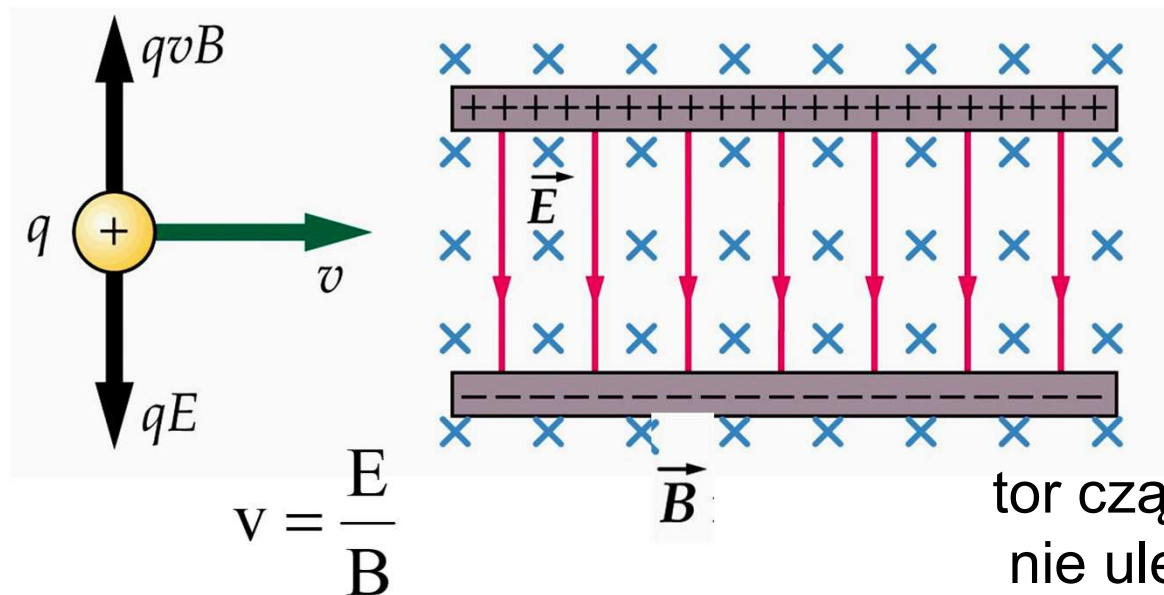


# Siła Lorentza

- Siła działająca na ładunek w obszarze, w którym występują jednocześnie pole elektryczne i magnetyczne

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$$

Ruch w skrzyżowanych polach, tj. gdy  $\vec{B} \perp \vec{E}$  jeżeli



$$\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{E}$$

to

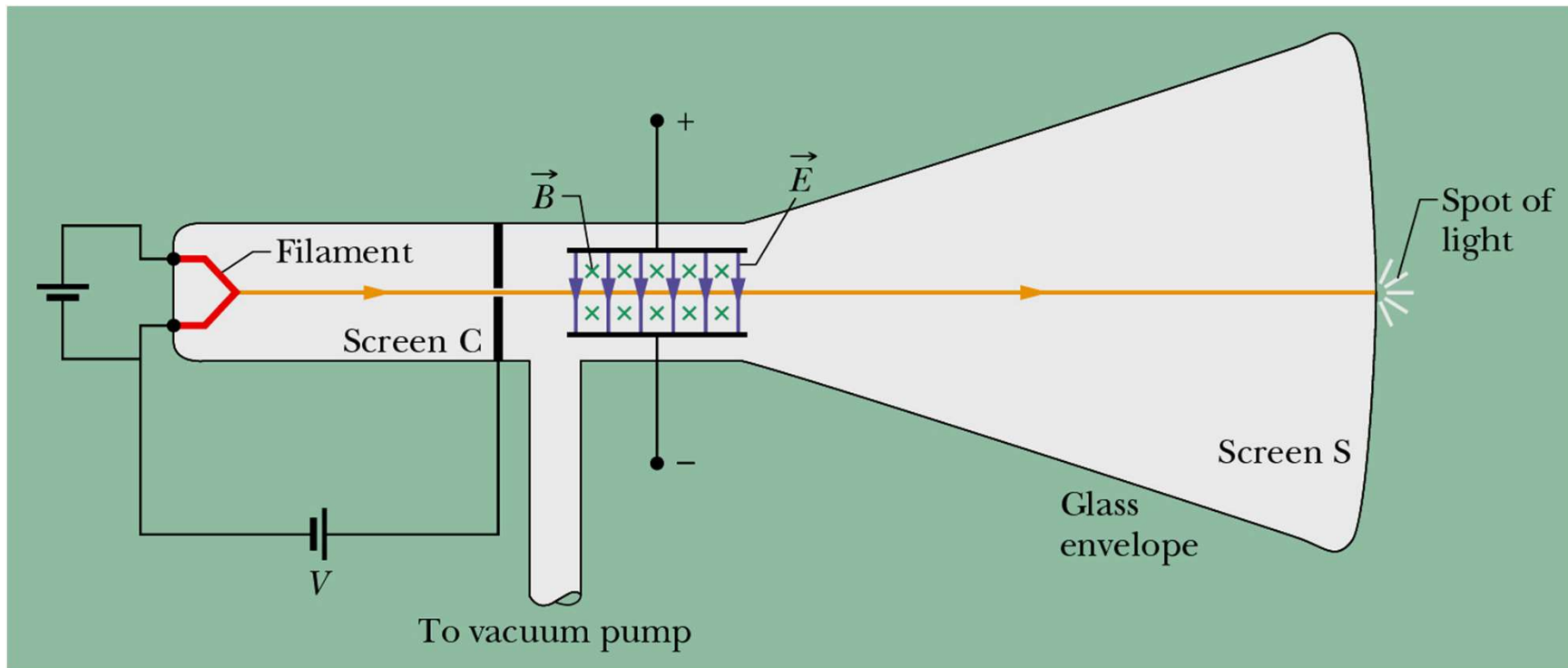
$$\vec{F} = 0$$

tor cząstki i jej prędkość  
nie ulegną zmianie

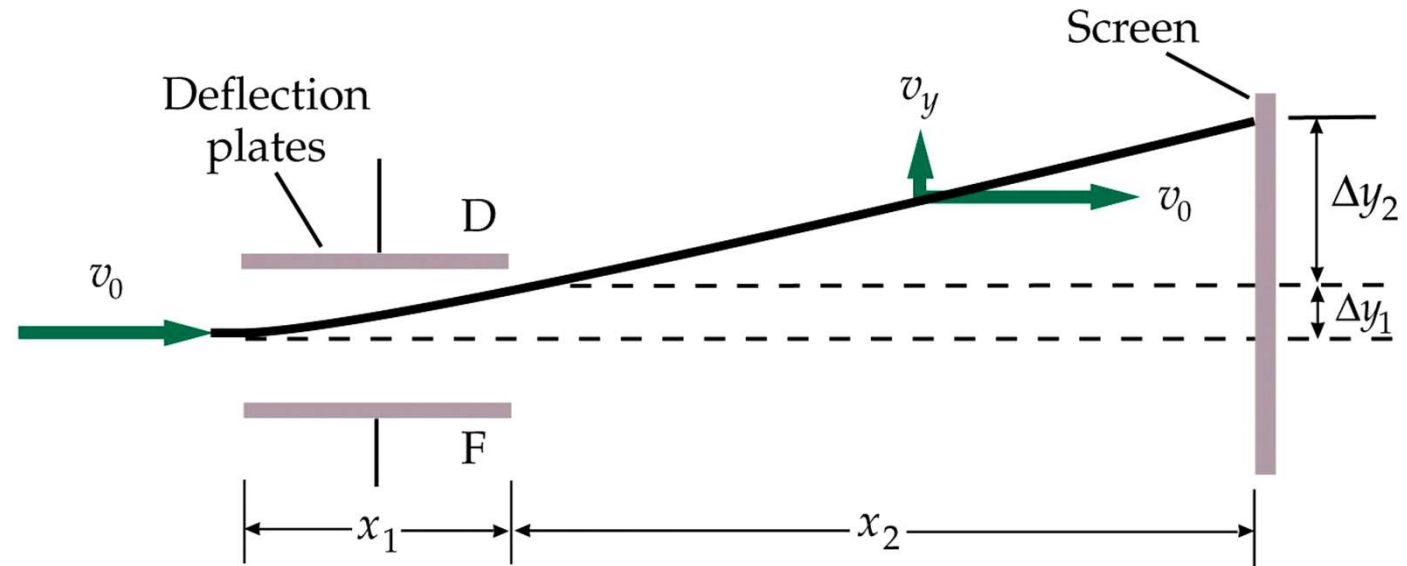
# Doświadczenie Thomsona

- 1897 r. J.J. Thomson, Cambridge, wyznaczył  $q/m$  dla elektronu, odkrycie elektronu

$$\frac{q}{m} = 17,56 \cdot 10^{10} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$



# Zadanie 1.1

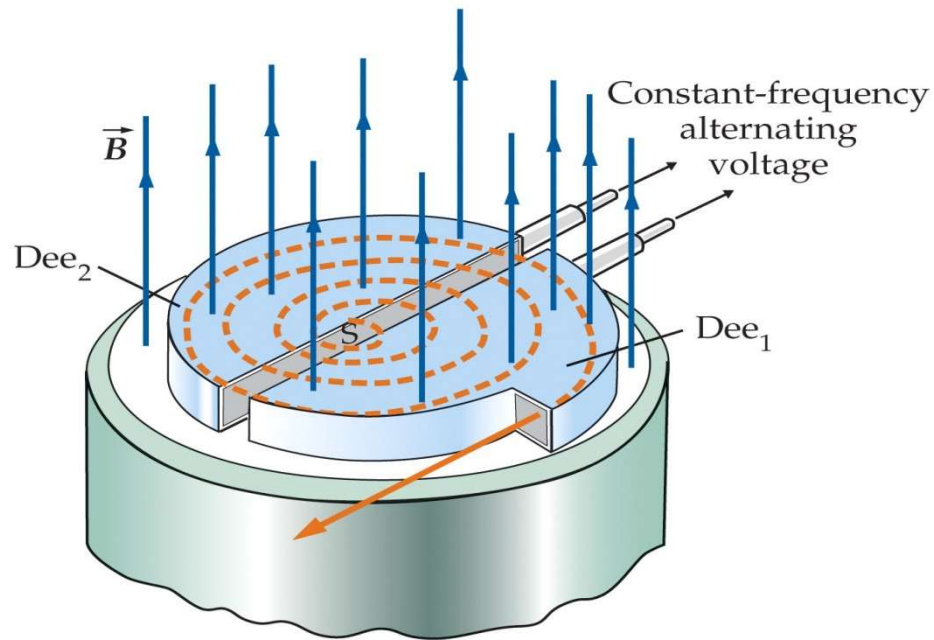


Wiązka elektronów przechodzi bez odchylenia przez lampę oscyloskopową kiedy natężenie pola elektrycznego wynosi  $3000 \text{ V/m}$ , a indukcja skrzyżowanego z nim pola magnetycznego wynosi  $1,4 \text{ Gs}$ ;  $1 \text{ Gs (gauss)} = 10^{-4} \text{ T}$ . Długość płytek odchylających wynosi  $4 \text{ cm}$ , a odległość od końca płytek do ekranu wynosi  $30 \text{ cm}$ . Znajdź odchylenie wiązki na ekranie przy wyłączonym polu magnetycznym

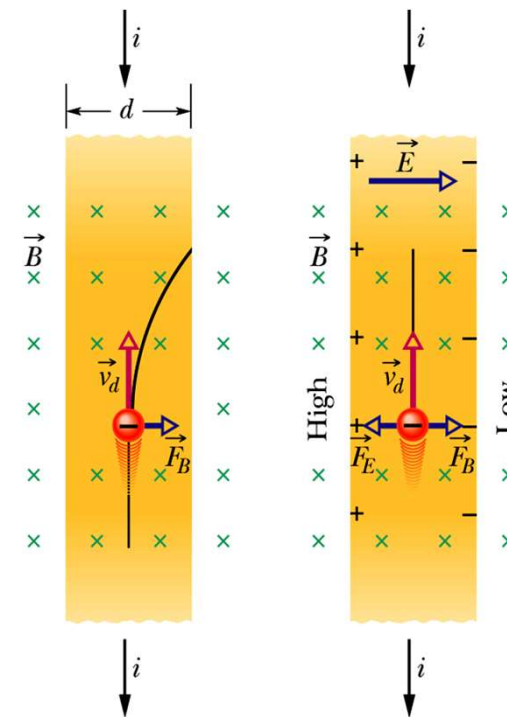
# Zadanie 1.2

Na podstawie podręcznika HRW, t.3 lub innych źródeł opracować dwa tematy:

- cyklotron i synchrotron



- zjawisko Halla



Podać przykłady praktycznego wykorzystania

# Definicja natężenia prądu

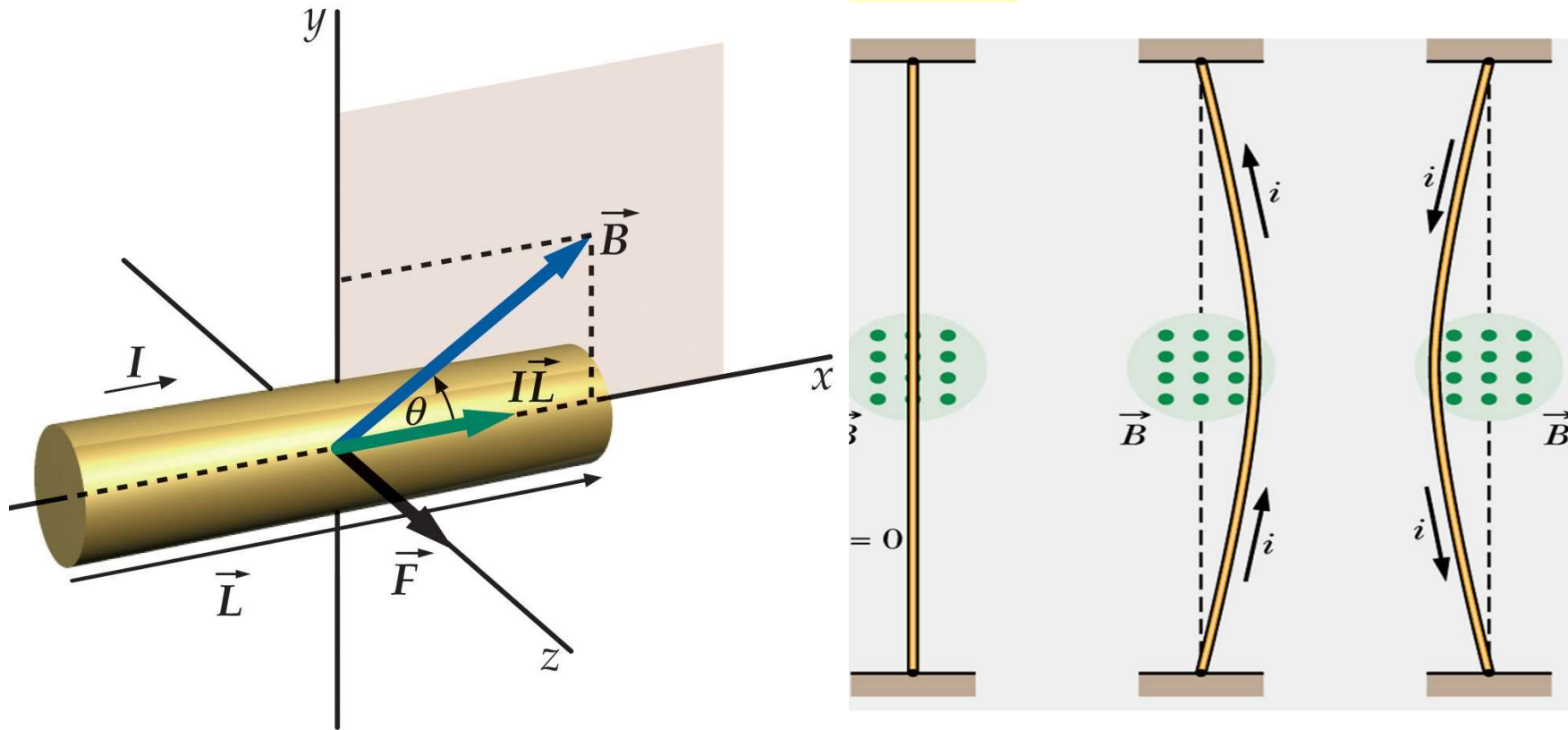
$$i = \frac{dq}{dt}$$

- ❑ Natężenie prądu jest skalarem
- ❑ Jednostką natężenia prądu jest  $1\text{A}=1\text{C/s}$   
(ale to nie jest definicja tej jednostki!)
- ❑ Umownie przyjmuje się, że prąd płynie tak jakby był to ruch ładunków dodatnich. W rzeczywistości prąd w metalu stanowią elektrony przewodnictwa

# Siła elektrodynamiczna

Siła działająca na przewodnik, przez który płynie prąd

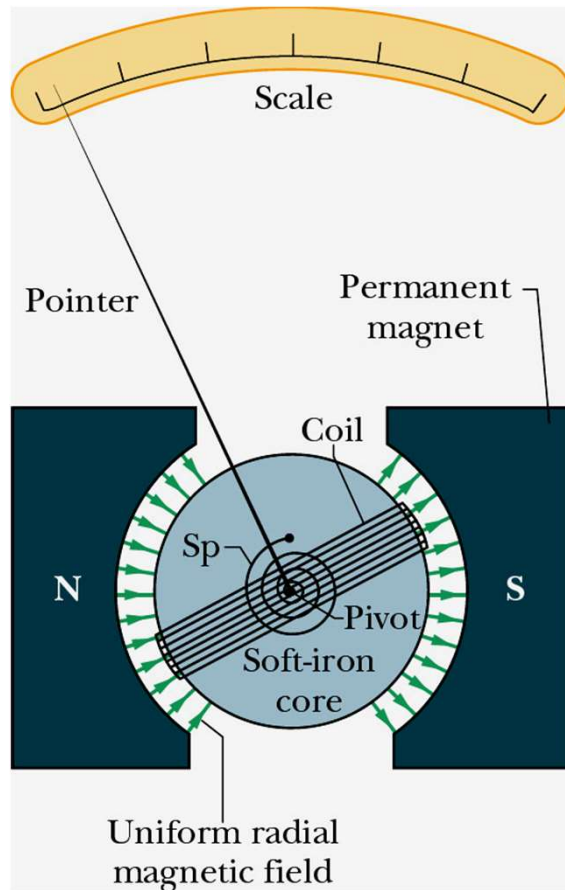
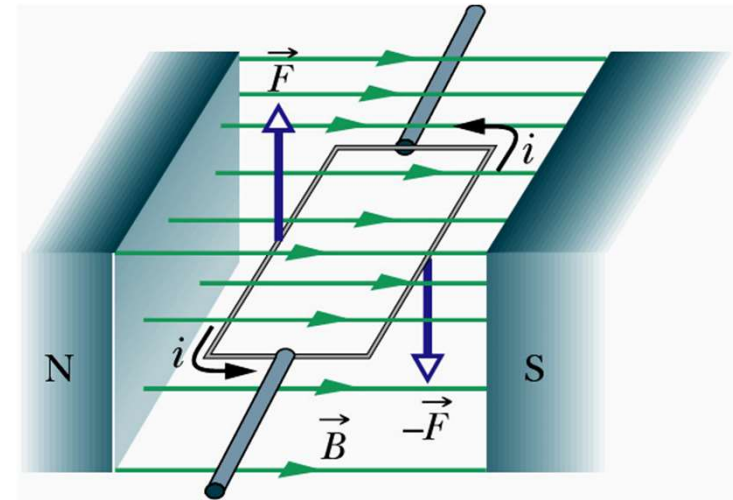
$$\vec{F} = i(\vec{L} \times \vec{B})$$





# Zastosowania siły elektrodynamicznej

- Silnik elektryczny – ramka z prądem w polu magnetycznym



- Analogowe mierniki – woltomierz, amperomierz, galwanometr

Na ramkę z prądem w zewnętrznym polu magnetycznym działa moment siły

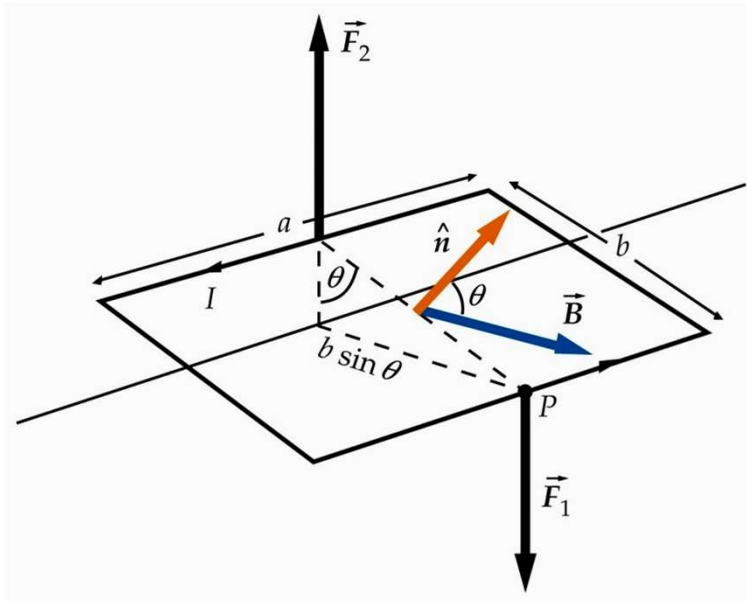
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$\vec{\mu}$  – moment magnetyczny

**Przypomnienie:** dla dipola elektrycznego

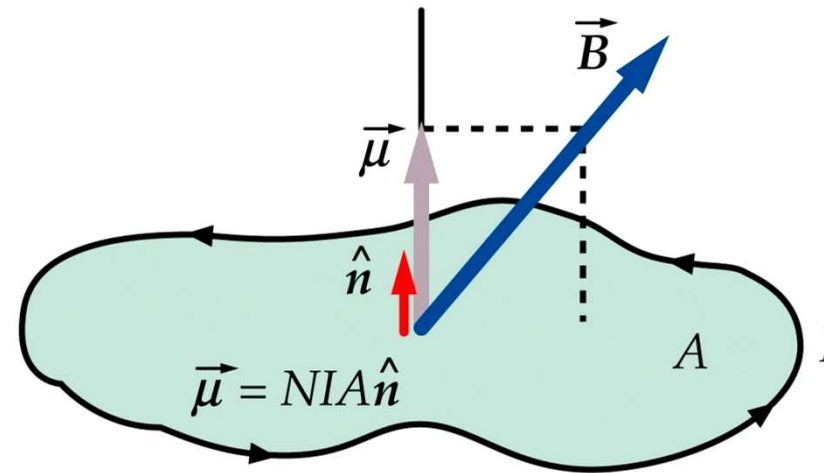
$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

# Moment magnetyczny



Pod wpływem momentu siły ramka ustawia się prostopadle do kierunku wektora indukcji pola magnetycznego, tak aby  $\vec{\mu} \parallel \vec{B}$

Moment magnetyczny definiowany jest dla każdego zamkniętego obwodu, przez który płynie prąd I:



$$\vec{\mu} = NIA\hat{n}$$

liczba zwojów

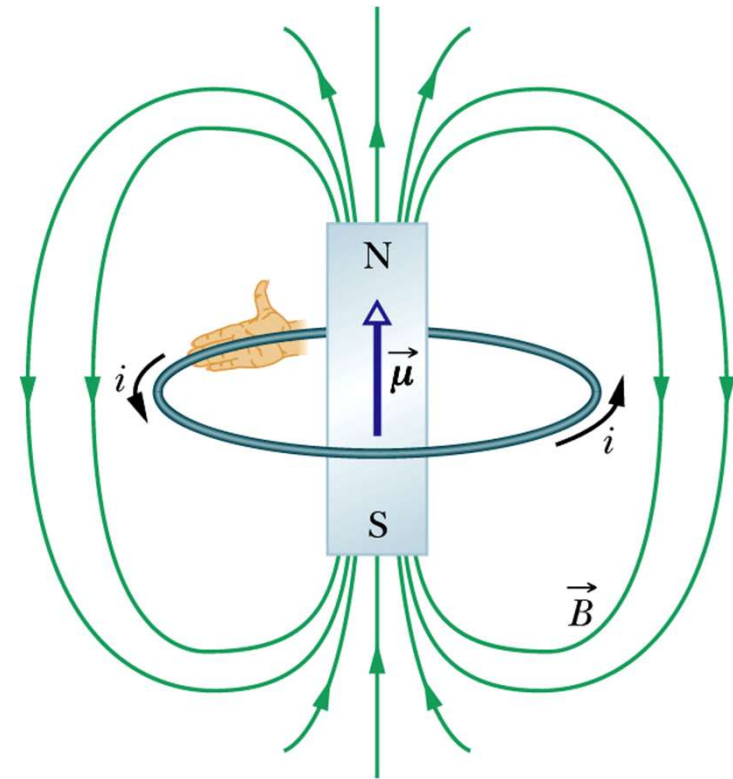
pole powierzchni

wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni A

# Dipol magnetyczny

Moment magnetyczny charakteryzuje każdy dipol magnetyczny. Dipolem magnetycznym jest nie tylko ramka (pętla, cewka), przez który płynie prąd lecz również:

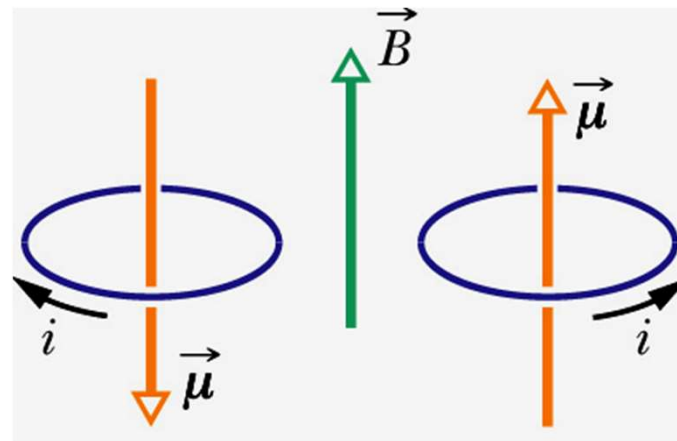
- magnes sztabkowy ( $\mu \approx 5 \text{ J/T}$ )
- Ziemia (w przybliżeniu)  $\mu \approx 8,0 \cdot 10^{22} \text{ J/T}$
- większość cząstek elementarnych, np. elektron ( $\mu \approx 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$ ), proton ( $\mu \approx 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$ ), neutron



Energia potencjalna  $E_p$  dipola magnetycznego z zewnętrznym polu magnetycznym:

$$E_p = -\vec{\mu} \circ \vec{B}$$

najwyższa  
energia  $E_p$

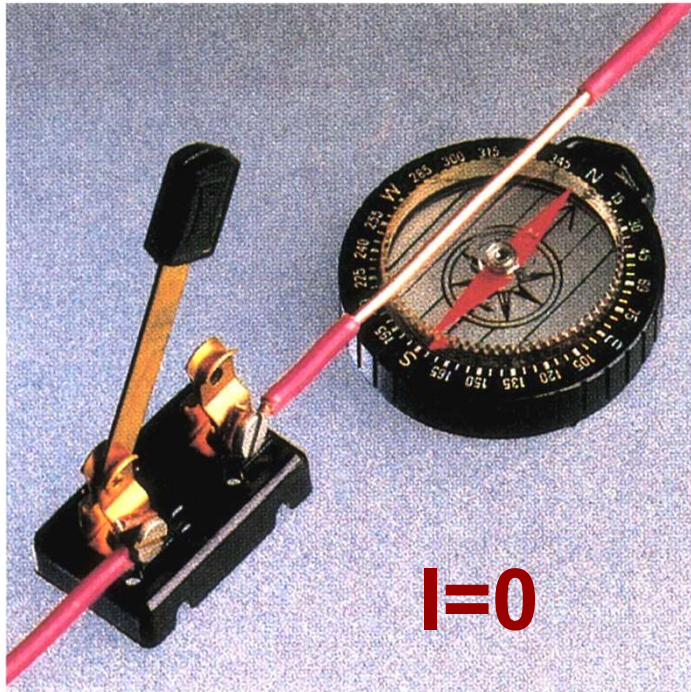


najniższa  
energia  $E_p$

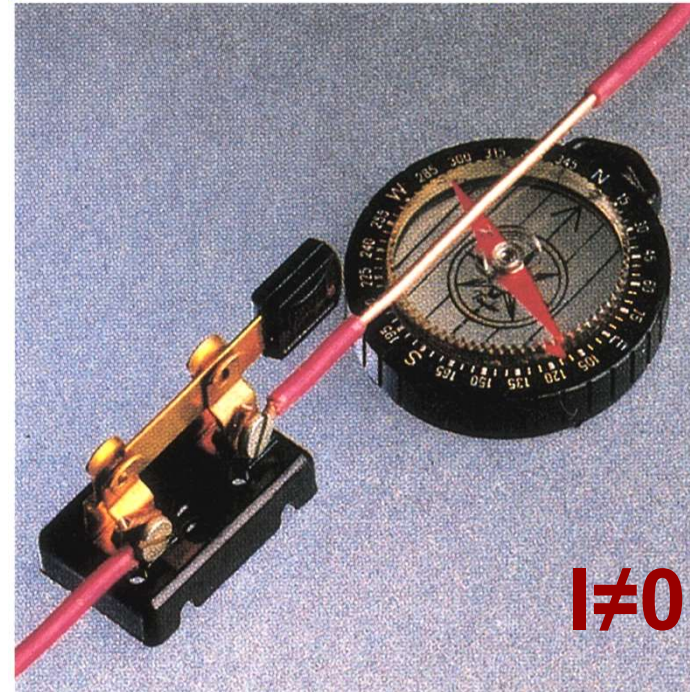
**Przypomnienie:** dla dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym

$$E_p = -\vec{p} \circ \vec{E}$$

# Prąd elektryczny jako źródło pola magnetycznego - doświadczenie Oersteda (1819-1820)



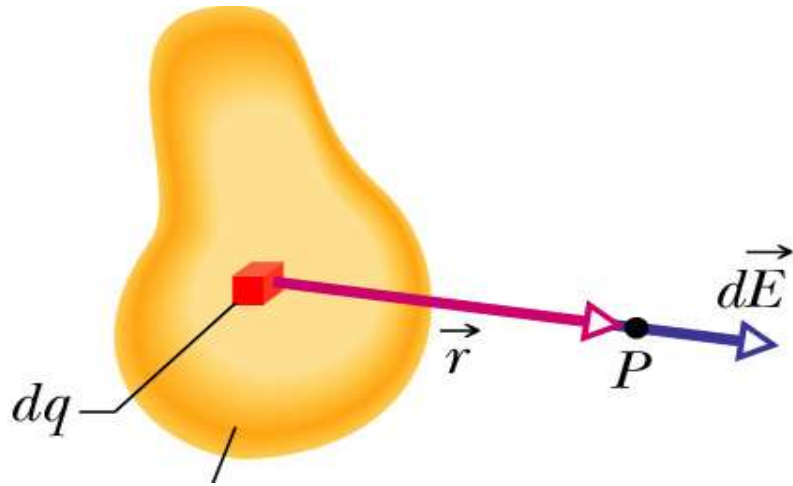
Kiedy przez przewodnik nie płynie prąd, igła ustawia się wzdłuż kierunku pola magnetycznego ziemskiego



Kiedy przez przewodnik płynie prąd, igła odchyła się od kierunku pola magnetycznego Ziemi.

Dlaczego?

# PRAWO BIOTA-SAVARTA



Rozkład ładunku

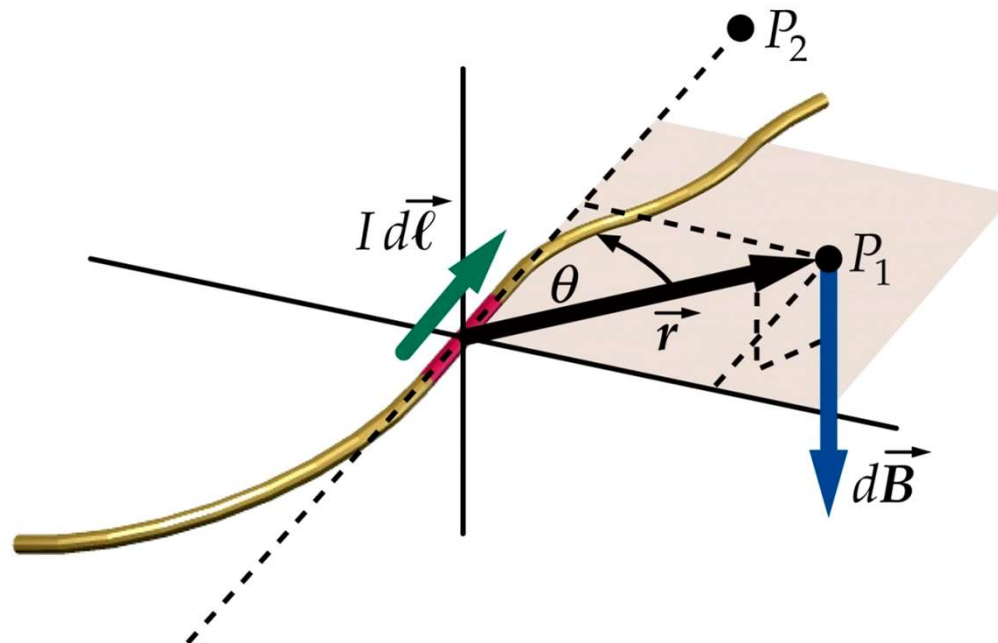
Prawo Coulomba

Zasada superpozycji

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Prawo Biota-Savarta

Zasada superpozycji



# Przykład 1.1

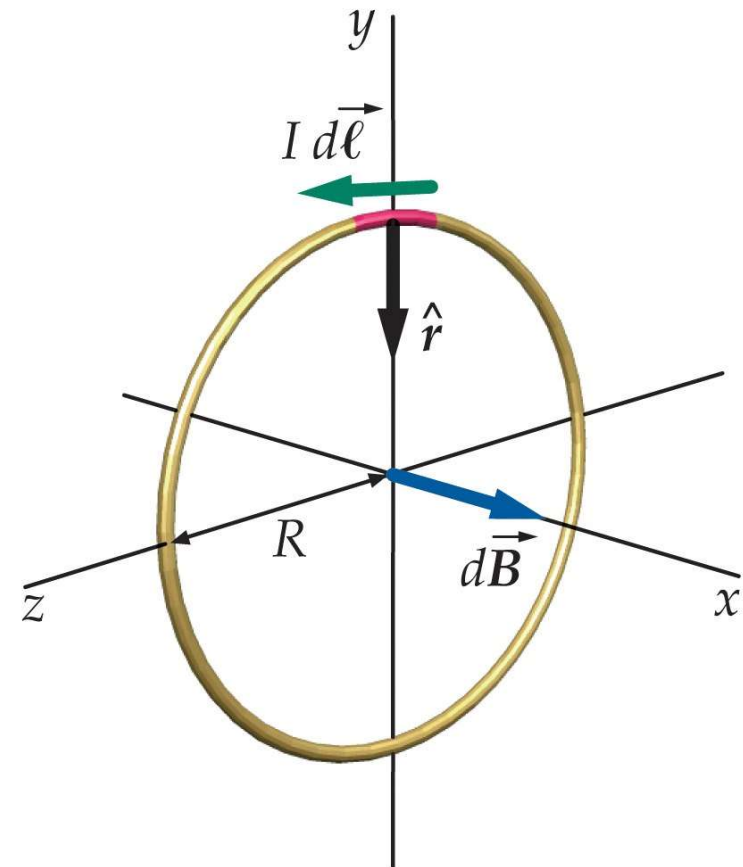
Znaleźć wektor indukcji pola magnetycznego w środku pętli o promieniu  $R$ , przez którą płynie prąd o natężeniu  $I$ .

Z prawa Biota-Savarta

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin\theta}{R^2} \quad \theta = 90^\circ$$

$$B = \oint dB = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \underbrace{\oint dl}_{2\pi R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$



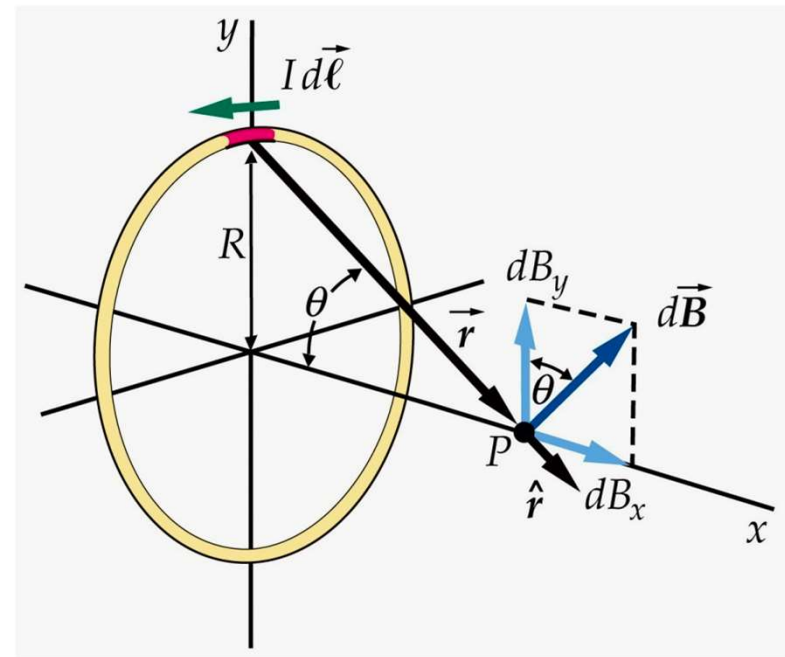
## Zadanie domowe 1.3

Pokazać, że (a) wartość wektora indukcji pola magnetycznego w punkcie P na osi pętli z prądem wynosi

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

(b) a w dużej odległości od środka pętli  $x \gg R$

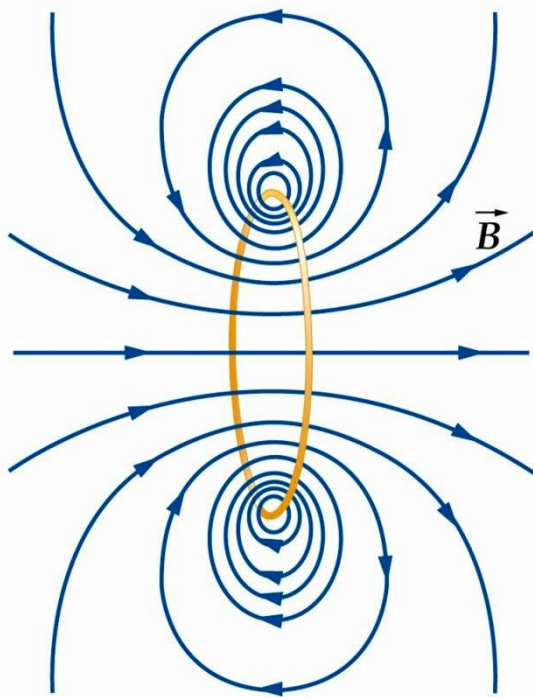
$$B_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{|x|^3}$$





## Pętla z prądem zachowuje się jak dipol magnetyczny – wniosek z zadania 1.3

Pętla z prądem wytwarza pole magnetyczne jak dipol magnetyczny w dużych odległościach (pole magnetyczne zanika z odległością jak  $x^{-3}$ , podobnie jak dla dipola elektrycznego)



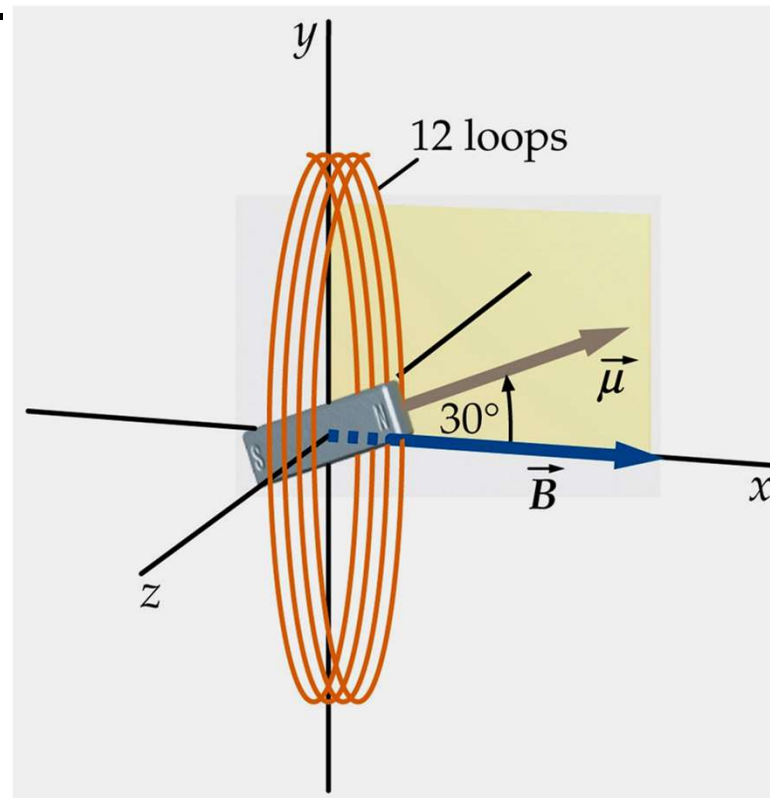
## Zadanie domowe 1.4

Pętla kołowa o promieniu  $r=5$  cm ma 12 zwojów. Przez pętlę płynie prąd o natężeniu 4A. Układ odniesienia wybrano tak, że pętla leży w płaszczyźnie YZ ( $x=0$ ) a początek układu odniesienia leży w środku pętli. Znaleźć wartość indukcji pola magnetycznego na osi x dla:

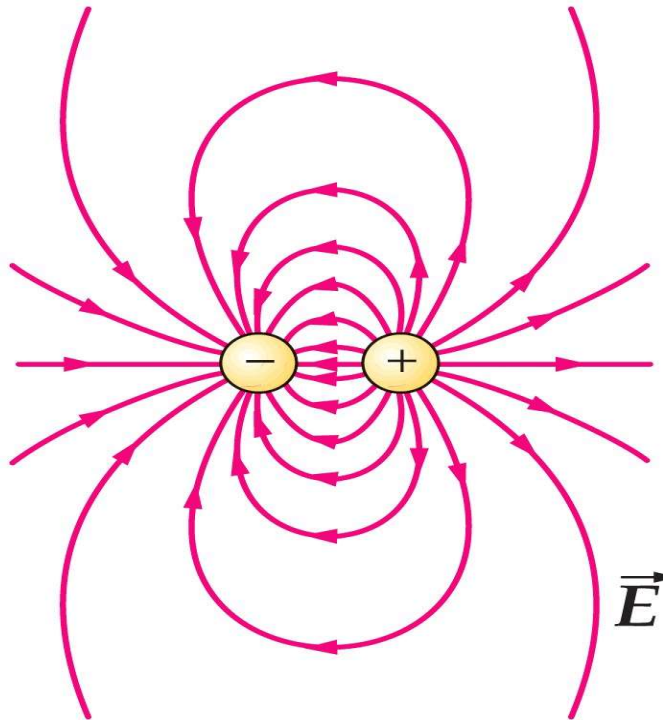
- (a)  $x=0$
- (b)  $x=3$  cm
- (c)  $x=15$  cm
- (d)  $x=3$  cm w przybliżeniu dipolowym

## Zadanie domowe 1.5

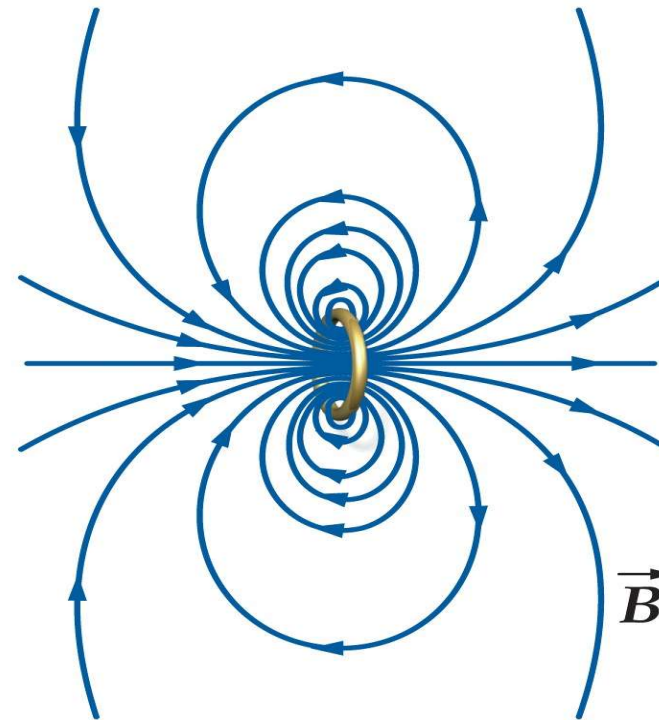
Mały magnes sztabkowy o momencie magnetycznym  $\vec{\mu}$  jest umieszczony w środku pętli z poprzedniego zadania. Wektor momentu magnetycznego leży w płaszczyźnie XY i tworzy kąt  $30^\circ$  z osią OX. Znaleźć wektor momentu siły działającego na magnes. Zanedbać efekty związane ze zmianami pola magnetycznego w obszarze zajmowanym przez magnes.



# Pole magnetyczne a elektryczne -podobieństwa i różnice

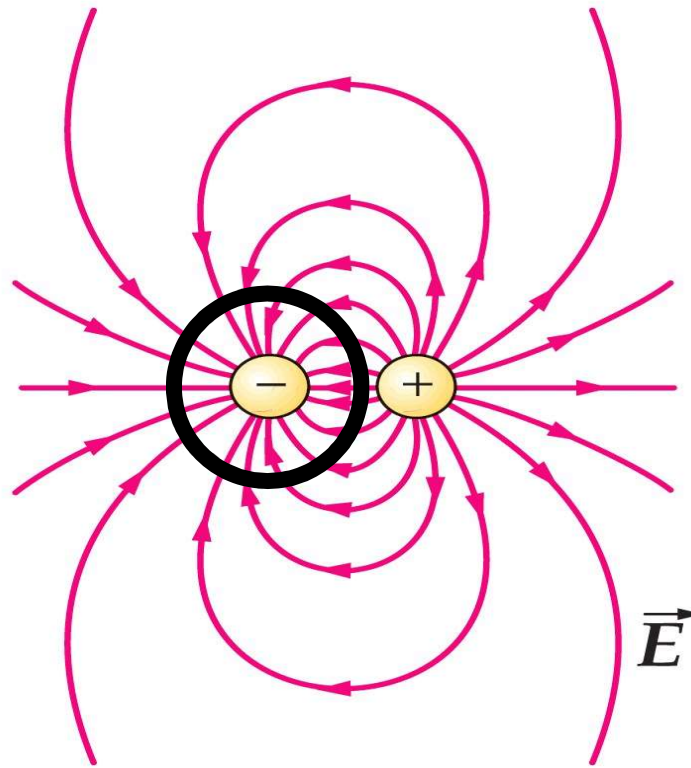


Linie pola elektrycznego zaczynają się i kończą na ładunku elektrycznym



Linie pola magnetycznego tworzą zamknięte pętle. Na niczym się nie zaczynają i nie kończą

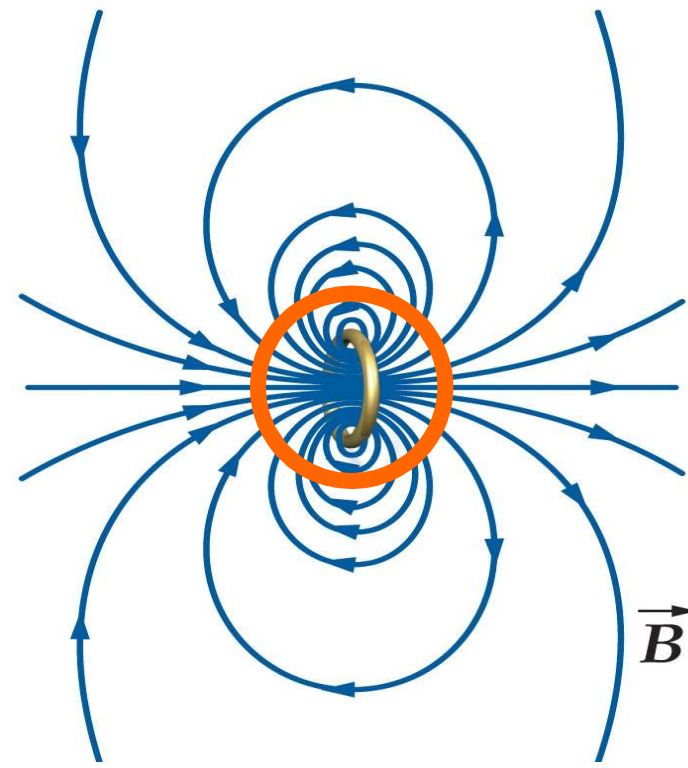
# PRAWO GAUSSA



Istnieje  
pojedynczy  
ładunek  
punktowy –  
monopol  
elektryczny

$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



$$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{A} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Brak monopoli magnetycznych.  
Magnes czy pętla z prądem  
stanowią dipol magnetyczny

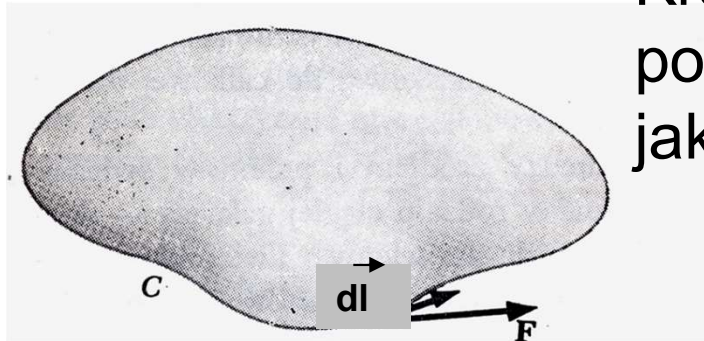
Prawo Gaussa dla pola magnetycznego jest jednym z równań Maxwella.

Jego treścią jest fakt, że pole magnetyczne jest **bezzródłowe**. Strumień pola magnetycznego przez powierzchnię zamkniętą jest zawsze równy zeru. Nie można wyodrębnić pojedynczego bieguna magnetycznego – **nie istnieją monopole magnetyczne**.

$$\Phi_B = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$$

# KRĄŻENIE POLA WEKTOROWEGO



Krażenie (cyrkulacja) pola wektorowego  $\vec{F}$  po konturze zamkniętej jest zdefiniowane jako całka krzywoliniowa:

$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \circ d\vec{l}$$

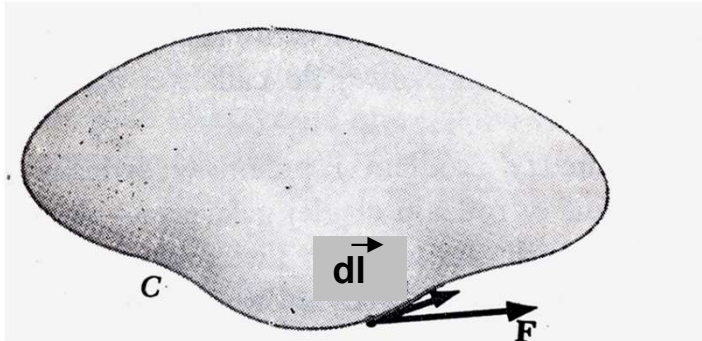
$d\vec{l}$  element drogi całkowania ma kierunek styczny do krzywej C w danym punkcie

Jeżeli  $\vec{F}$  jest siłą, to krażenie  $\Gamma$  ma sens fizyczny pracy.

Jeżeli  $\vec{F}$  jest siłą zachowawczą (pole elektrostatyczne, grawitacyjne), to  $\Gamma=0$ .

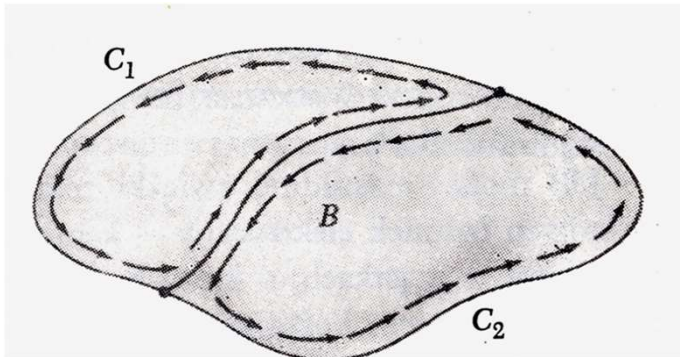
Krzywa C ogranicza pewną powierzchnię zamkniętą rozpiętą na tej krzywej.

# ROTACJA POLA



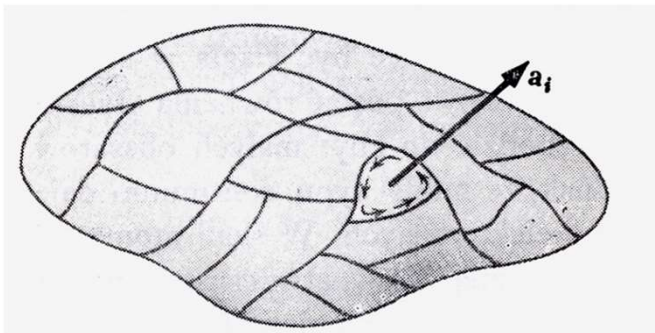
$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \circ d\vec{I}$$

Prowadząc krzywą B tworzymy dwa zamknięte kontury  $C_1$  i  $C_2$  takie, że:



$$\oint_C \vec{F} \circ d\vec{I} = \oint_{C_1} \vec{F} \circ d\vec{I} + \oint_{C_2} \vec{F} \circ d\vec{I}$$

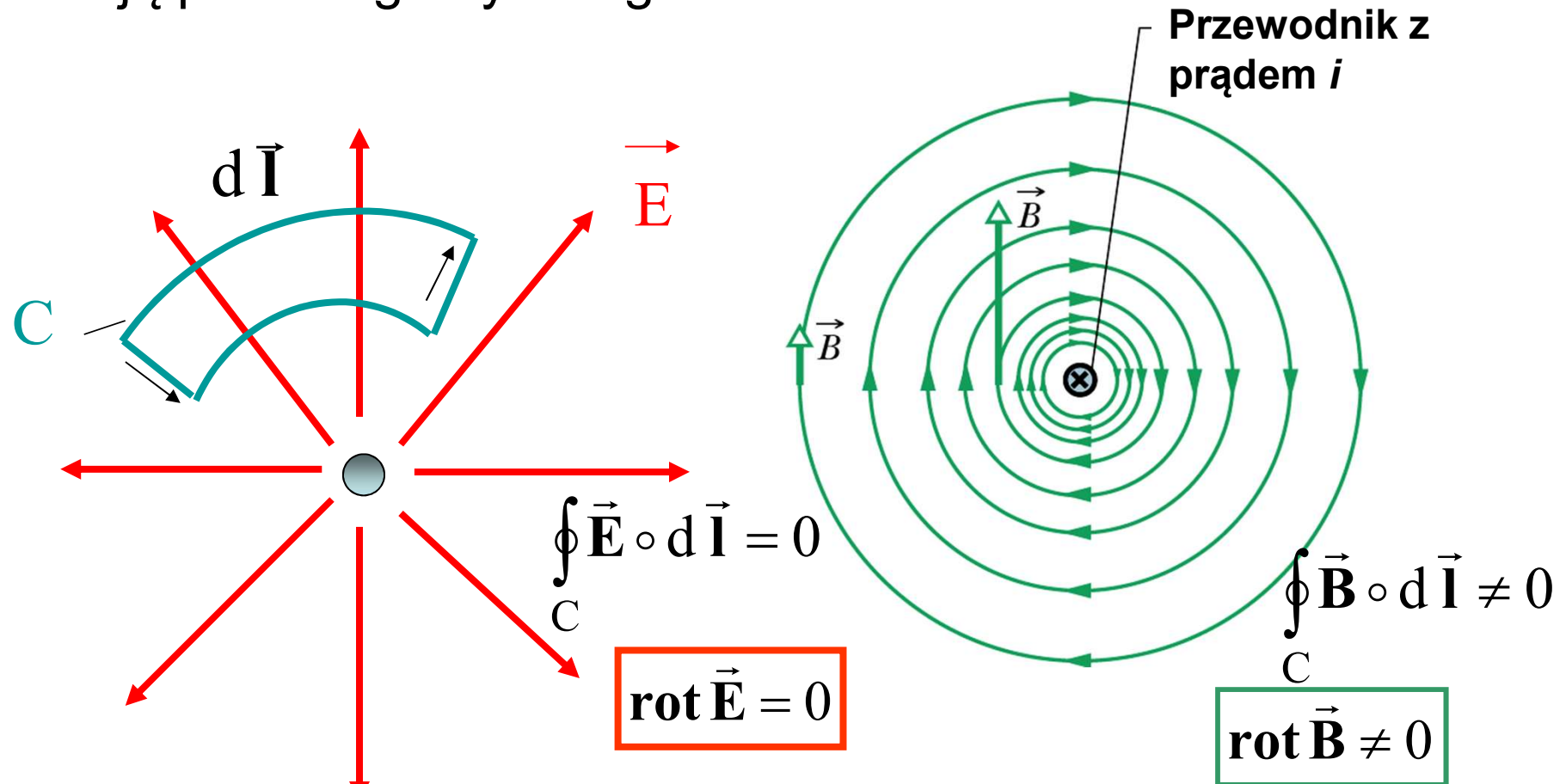
definicja operatora rotacji



$$(\text{rot } \vec{F}) \circ \hat{n} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{F} \circ d\vec{I}}{a_i}$$

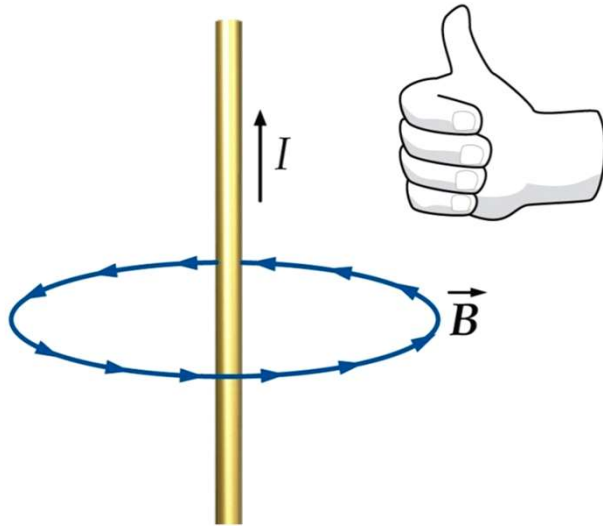


**Pytanie:** Pole elektrostatyczne jest polem **bezwirowym** (rotacja pola jest równa zero w każdym jego punkcie). A co z rotacją pola magnetycznego?



**Odpowiedź:** Istotnie, pole magnetyczne jest polem wirowym. To określa prawo Ampère'a.

# Prawo Ampère'a

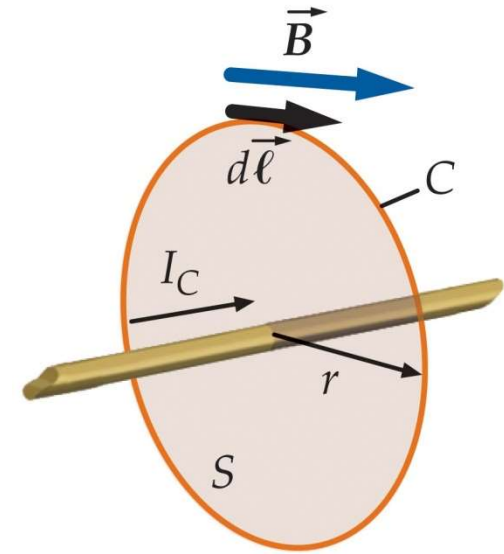


$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 I_C$$

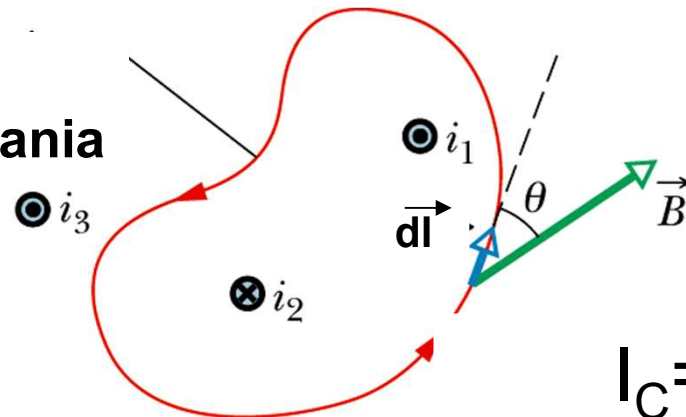
krążenie pola magnetycznego      prąd wewnątrz konturu całkowania C

$\mu_0$  - przenikalność magnetyczna próżni, stała uniwersalna

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}$$



kontur całkowania



$$I_C = i_1 - i_2 \quad 26$$

# Twierdzenie Stokes'a

- Wiąże krążenie wektora po krzywej  $C$  z rotacją w punkcie, podobnie jak twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego wiązało strumień pola przez powierzchnię z dywergencją w punkcie

$$\oint_C \vec{F} \circ d\vec{l} = \iint_S (\text{rot } \vec{F}) \circ d\vec{a}$$

całka powierzchniowa, po powierzchni  $S$  ograniczonej krzywą  $C$

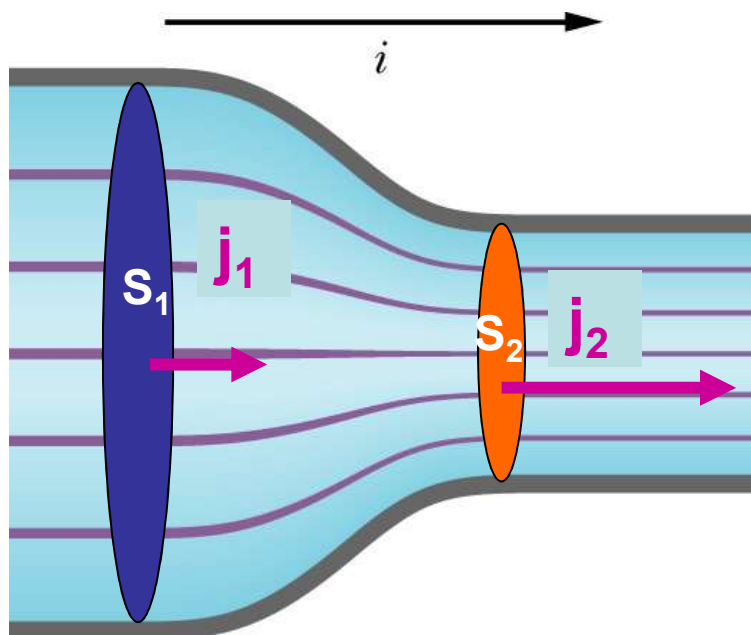
- Prawo Ampère'a w postaci różniczkowej

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$



# Gęstość prądu

- Gęstość prądu jest to wektor, którego wartość równa jest natężeniu prądu przepływającemu przez element pola przekroju powierzchni na jednostkę pola tej powierzchni



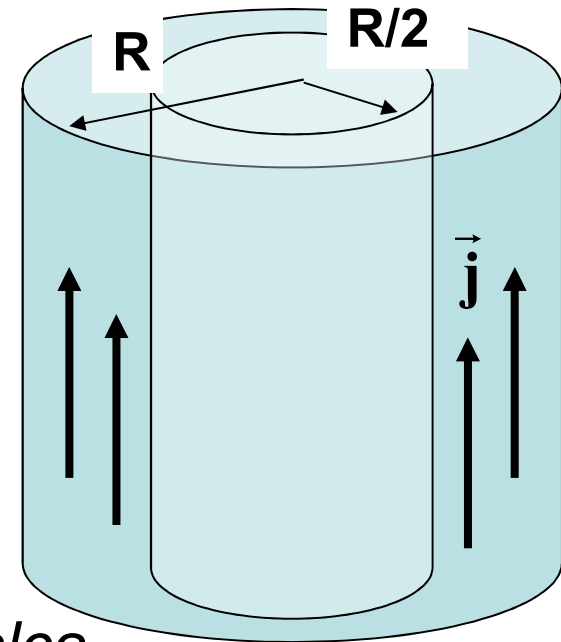
$$\mathbf{j} = \frac{di}{dS}$$

$$i = \int \overbrace{\mathbf{j} \circ d\vec{S}}^{\text{strumień}}$$

Wartość natężenia prądu pozostaje stała, zmienia się gęstość prądu – prawo ciągłości przepływu, zasada zachowania ładunku

## Przykład 1-2

Gęstość prądu w przewodniku o kształcie walca o promieniu  $R = 2 \text{ mm}$  jest jednakowa na całym przekroju przewodnika i równa  $j = 2 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$ . Ile wynosi natężenie prądu, przepływającego przez zewnętrzną warstwę przewodnika, w obszarze pomiędzy  $R/2$  i  $R$ ?



Rozwiązanie:

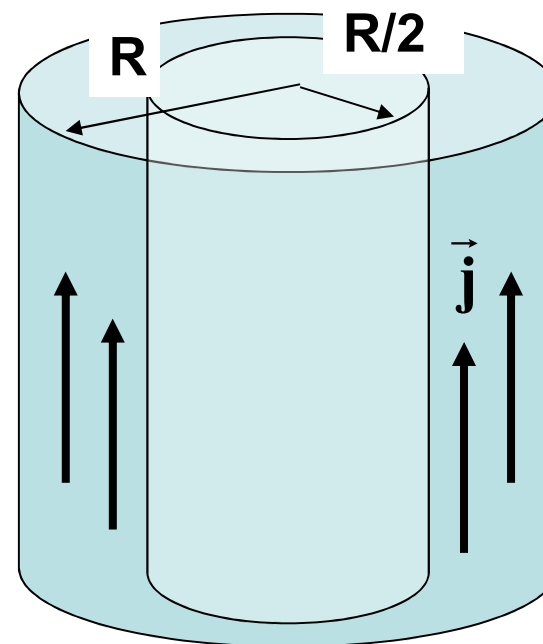
$i = jS'$  bo  $j = \text{const}$  na całym przekroju walca

$$S' = \pi R^2 - \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 = \frac{3\pi}{4} R^2$$

Odpowiedź:  $i = 1,9 \text{ A}$

## Przykład 1-3

Założmy, że gęstość prądu w przewodniku o kształcie walca o promieniu  $R = 2 \text{ mm}$  nie jest jednakowa na całym przekroju przewodnika i zmienia się z odległością  $r$  od środka walca zgodnie ze wzorem  $j = \alpha r^2$ , gdzie  $\alpha = 3 \cdot 10^{11} \text{ A/m}^4$ . Ile wynosi natężenie prądu, przepływającego przez zewnętrzną warstwę przewodnika, w obszarze pomiędzy  $R/2$  i  $R$ ?



Rozwiązanie:

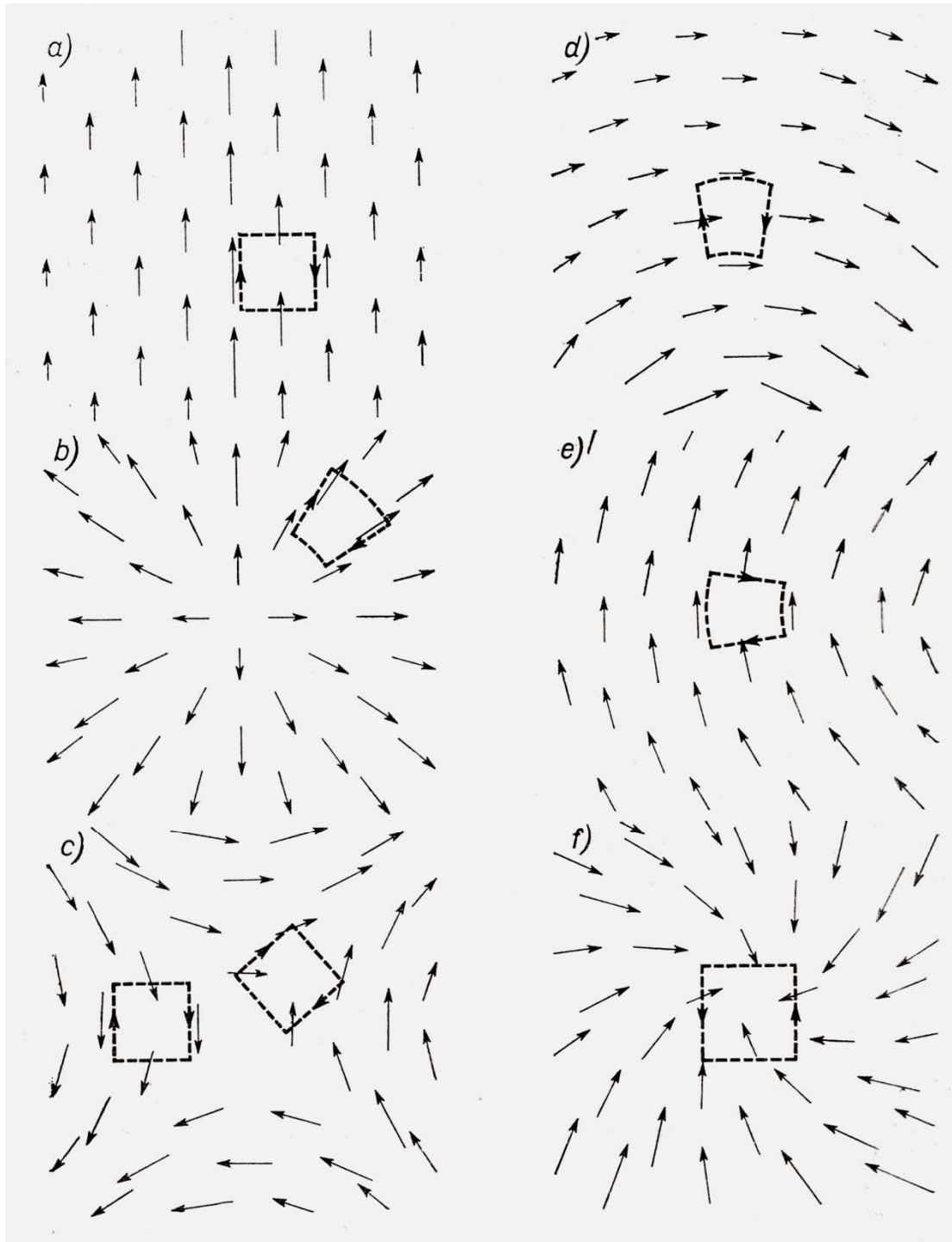
$$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int j dS = \int_{R/2}^R \alpha r^2 2\pi r dr$$

Odpowiedź:

$$i = \frac{15}{32} \pi \alpha R^4 \quad i = 7,1 \text{ A}$$

## Zadanie domowe 1.6

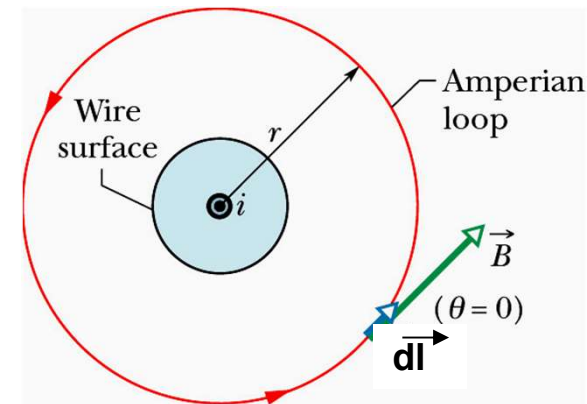
Cztery z przedstawionych pól wektorowych mają znikającą dywergencję w przedstawionym obszarze. Trzy z nich mają znikającą rotację. Czy możecie ocenić, które z pól mają omawiane własności?



# Zastosowania prawa Ampère'a

- pole magnetyczne wokół przewodnika prostoliniowego

$\vec{B} \parallel d\vec{l}$       $B = \text{const}$  na krzywej  $C$   
(kontur całkowania jest okręgiem )



krążenie wektora indukcji magnetycznej po okręgu o promieniu  $r$

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = B \oint_C dl = 2\pi r B$$

korzystając z prawa Ampère'a

$$2\pi r B = \mu_0 i$$

Odpowiedź:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

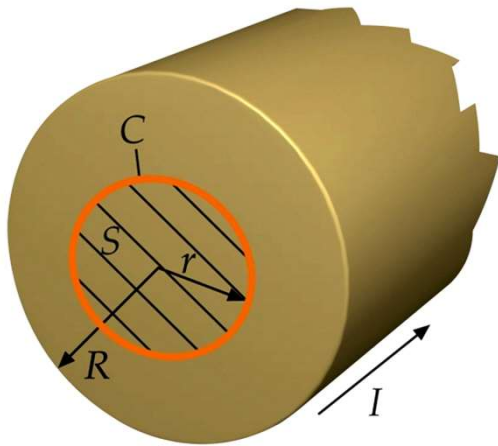


## Zadanie domowe 1.7

Ten sam rezultat można otrzymać poprzez żmudne całkowanie, korzystając z prawa Biota-Savarta. Proszę spróbować, aby móc docenić prawo Ampère'a. Odpowiednie obliczenia znajdziemy w Rozdz.30, &30.1 podręcznika HRW, t. 3.

# Zastosowania prawa Ampère'a

- pole magnetyczne wewnątrz przewodnika o promieniu  $R$ , przez który płynie prąd  $I$  ( $r < R$ )



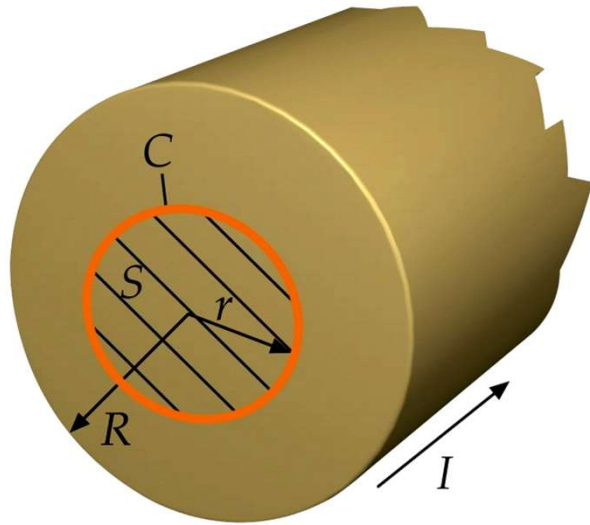
krążenie wektora indukcji magnetycznej po okręgu o promieniu  $r$  wyraża się tym samym wzorem dla  $r < R$  i  $r > R$

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = 2\pi r B$$

trzeba znaleźć natężenie prądu  $I_C$  wewnątrz konturu

gęstość prądu  $j$  jest stała

$$j = \frac{I_C}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2}$$



$$j = \frac{I_C}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2}$$



$$I_C = \frac{I}{R^2} r^2$$

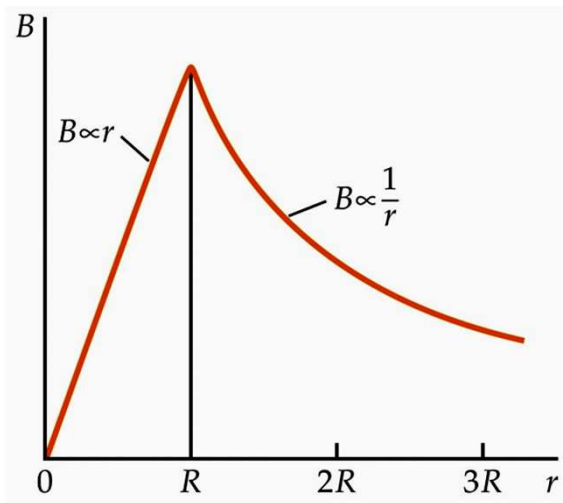
z prawa Ampère'a

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 I_C$$

$$2\pi Br = \mu_0 \frac{I}{R^2} r^2$$

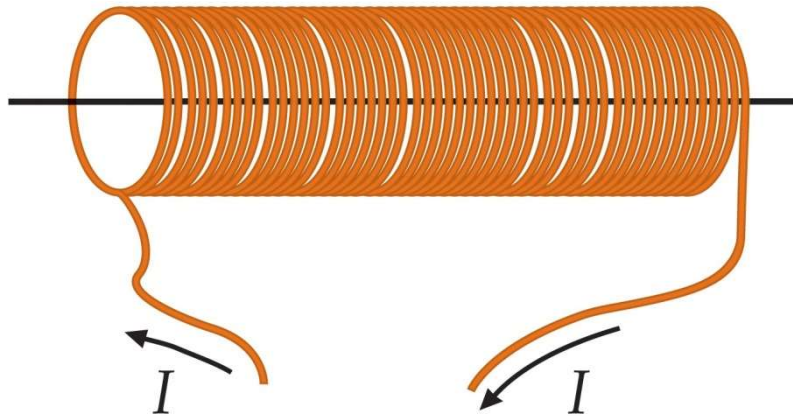
Odpowiedź:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

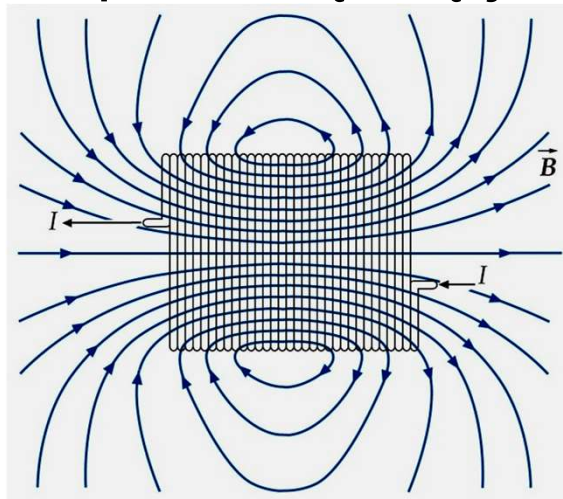


# Zastosowania prawa Ampère'a

- pole magnetyczne wewnątrz solenoidu



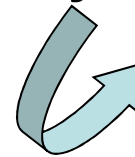
Solenoid wytwarza jednorodne pole magnetyczne i pełni podobną rolę jak kondensator płaski w elektrostatyce



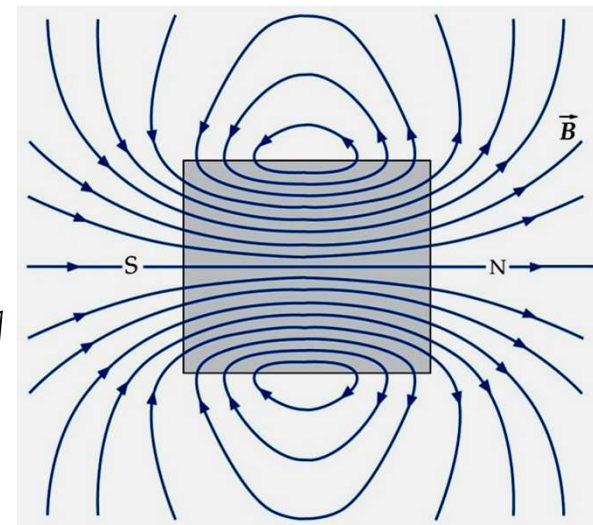
**solenoid**



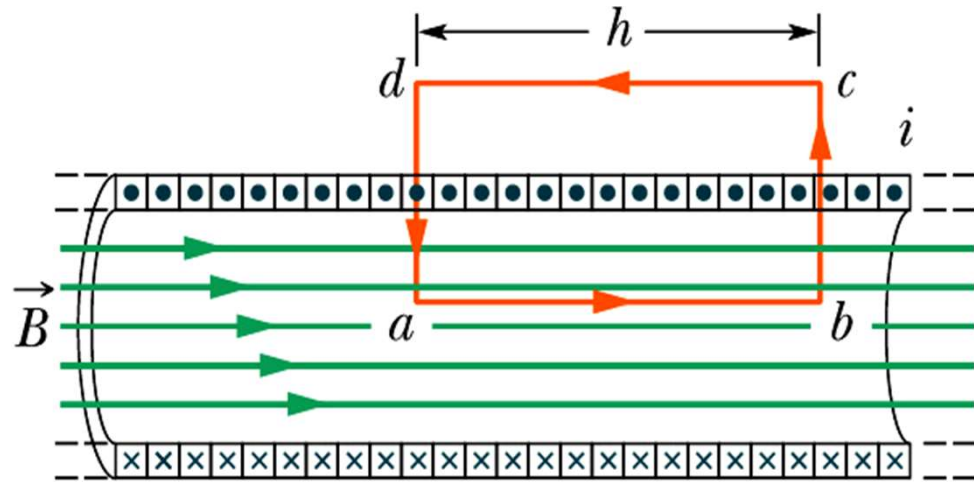
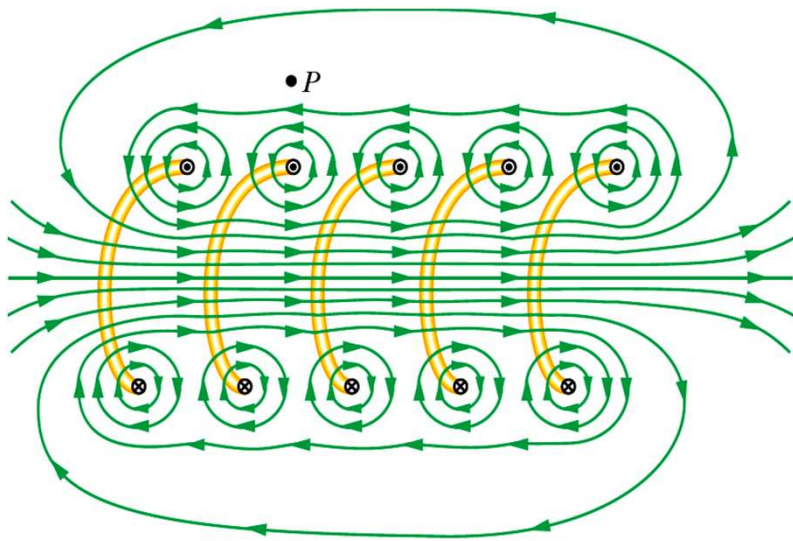
**magnes  
sztabkowy**



lato 2017/18



36



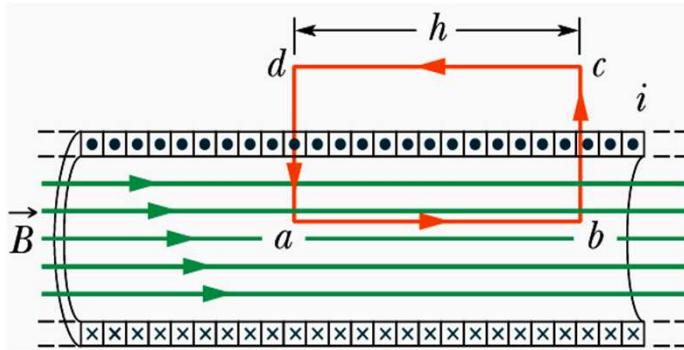
$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \circ d\vec{l}$$

$Bh$ 
 $0$ 
 $0$ 
 $0$

dlaczego?

$$\vec{B} \parallel d\vec{l} \quad \vec{B} \perp d\vec{l} \quad B=0 \quad \vec{B} \perp d\vec{l}$$

pole jednorodne



$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = Bh = \mu_0 I_C$$

$$I_C = (nh)i$$

liczba zwojów na  
jednostkę długości

natężenie prądu w  
uzwojeniu solenoidu

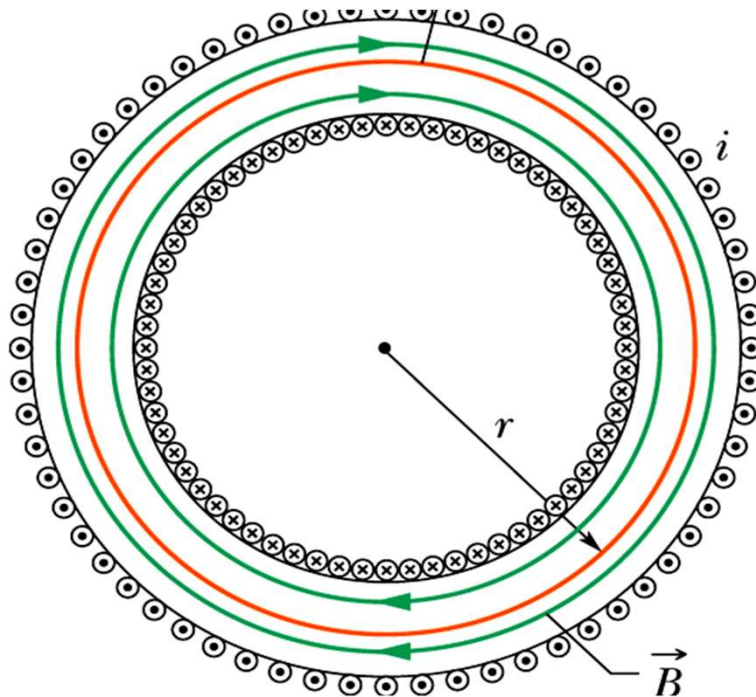
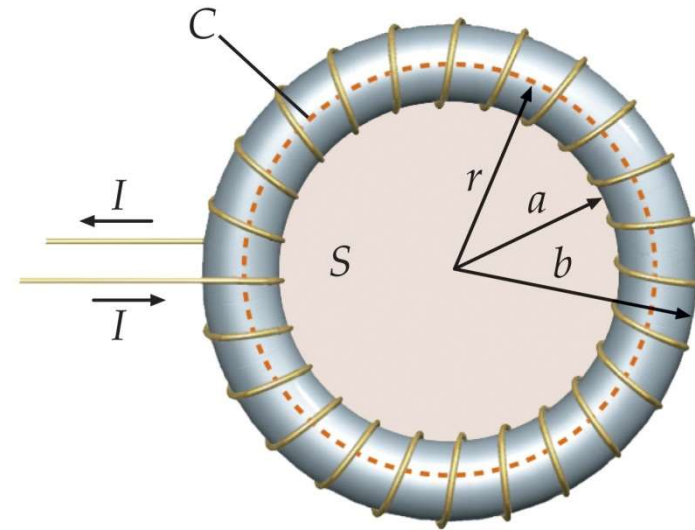
solenoid idealny

$$B = \mu_0 ni$$

# Zadanie domowe 1.8

Toroid

Wykorzystać prawo Ampère'a do znalezienia wartości wektora indukcji wewnątrz toroidu, przez który płynie prąd o natężeniu  $I$ .



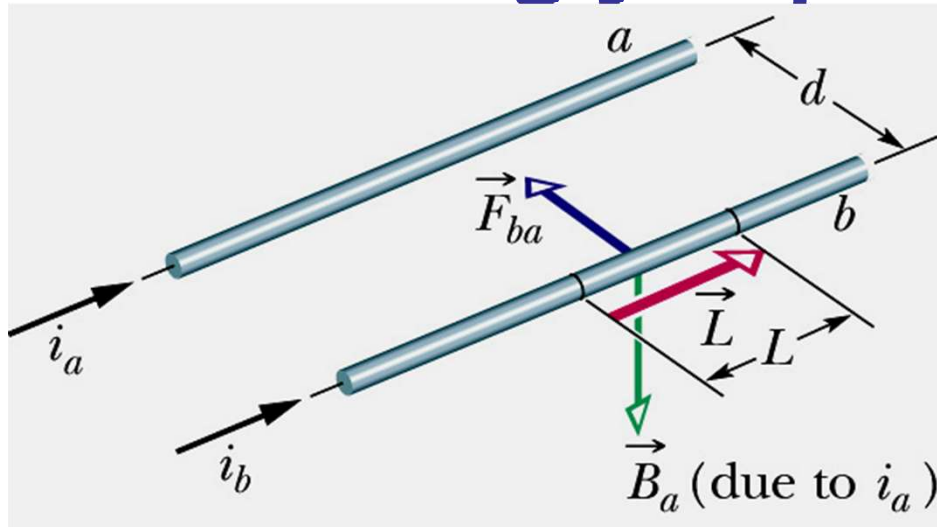
$$a < r < b$$

$d\vec{l}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi r}$$

$N$  - liczba zwojów toroidu

# Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem



Te przewody się przyciągają. Dlaczego?

pole magnetyczne wytworzone przez prąd  $i_a$

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

siła działająca na przewód z prądem  $i_b$

$$\vec{F}_{ba} = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a$$

**Definicja ampera:** 1A jest to natężenie prądu stałego, który płynąc w dwóch równoległych, prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o znikomo małym przekroju poprzecznym, umieszczonych w próżni w odległości 1m, wywołuje między tymi przewodami siłę o wartości  $2 \cdot 10^{-7}$  N na każdy metr długości przewodu

$$F_{ba} = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi d}$$



# Podsumowanie

- Ruch ładunku w polach magnetycznym i elektrycznym odbywa się pod wpływem siły Lorentza. Pole magnetyczne nie zmienia energii kinetycznej lecz zakrzywia tor ładunku.
- Różnice pomiędzy polem elektrostatycznym i magnetycznym można prześledzić posługując się prawem Gaussa dla elektryczności i magnetyzmu. Nie istnieją monopole magnetyczne.
- Na przewodnik z prądem w polu magnetycznym działa siła elektrodynamiczna.
- Ładunek w spoczynku wytwarza pole elektrostatyczne, ładunek w ruchu (prąd elektryczny) jest źródłem pola magnetycznego
- Wartość indukcji pola magnetycznego wytworzonego przez przewodnik z prądem można obliczyć korzystając z prawa Biota-Savarta lub prawa Ampère'a, które jednak stosujemy tylko do rozwiązywania problemów o wysokiej symetrii.